ОГБПОУ

«Рязанский колледж электроники»

Курс лекций по предмету:

«МАТЕМАТИКА»

Преподаватель:

Мозгова Л.Н.

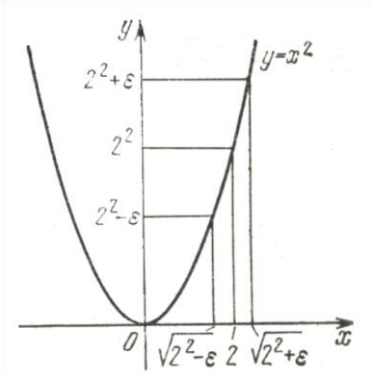


Рис. 54.

I. <u>Предел функций.</u>

Число А называется *пределом функции f(x) в точке x=a,* $A=\lim_{x\to a} f(x)$ (или f(x)→при x→a), если для любого ε >0 существует такое δ>0 что |x-a|< δ=>|f(x)-A|< ε.

Например, $\lim_{x\to 2} x^2$=4. В самом деле, для данного ε >0, как видно из рис 54, если в качестве δ взять наименьшее из чисел $\sqrt{2^2+\varepsilon}-2$ и 2-$\sqrt{2^2-\varepsilon}$, то при |x-2| < δ будем иметь $-\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon$, т.е. $|x^2-4| < \varepsilon$.

Функция y=f(x) называется бесконечно малой в точке x=a, если $\lim_{x\to a} f(x)$ и бесконечно большой, если $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

<u>Свойства :</u> бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1º Если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, то $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = 0$

2º Если f(x) бесконечно малая, F(x) – ограниченная, то $\lim_{x\to a}[f(x) \times F(x)] = 0$

3º Если $\lim_{x\to a} f(x) = A - const$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \infty$,)) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4º Если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty$, причем f(x)≠0 в окрестности точки a (и наоборот)

<u>Теорема о пределах:</u>

- Если $\lim_{x\to a} f(x)$ существует, то он единственный.
- Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то
  а) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

  б) $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = A \times B$

  в) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *B≠0, g(x)≠*0 при ∀x из окрестности точки a.

<u>Следствие:</u>

1. $\lim\limits_{x\to a}[c \times f(x)] = c \times \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где c-число.

2. $\lim\limits_{x\to a} x^{\mathrm{n}} = a^n$, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, n- натуральное число.

3. $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$, если P(x)=$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

1.2 Способы вычисления пределов.

1. (Непосредственным подставлением)

$$\lim_{x\to 0}(x^3+x-8)=0+0-8=-8$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-1}{x-4}=\frac{4+20-1}{2-4}=\frac{23}{-2}=-\frac{23}{2}$$

$$(\lim_{x\to 2}(x-4)=-2\neq 0$$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}=5\lim_{x\to 2}\frac{1}{4x-8}=\infty$, т.к. $\lim_{x\to 2}(4x-8)=0$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\times 0-2}{2\times 0-5}=\frac{2}{5}$

Вычислить:

а) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-4x^2}$

в) $\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$

4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+7x-6}{x^3+5x^2+2x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{(x-2)(x^2-3x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}=-\frac{5}{6}$

Вычислить

а) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-13x+12}$

б) $\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}+15}{\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2-10\mathrm{x}+24}$

5.$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=$
$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x})^2-(\sqrt{5+x})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}+x)}{2}=-\sqrt{5}$

Вычислить

а) $\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x-4}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$=(∞-∞)= $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}$

Вычислить

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}[x^3\left(1-\frac{6}{x\downarrow_0}+\frac{5}{x^2\downarrow_0}-\frac{1}{x^3\downarrow_0}\right)]=\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$

Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-4x^2)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3$-5x+6)

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{5+0}=\frac{2}{5}$

Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{4x^3+4x+2x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+5}{3x^3-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}^{\uparrow 0}+\frac{5}{x^3}^{\uparrow 0}}{3-\frac{5}{x^3\downarrow_0}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$

Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^6}{x^3+x^4+1}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6\times 2^x+5}{2\times 2^x-3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)(x+\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x\left(1+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x\downarrow_0}}}=\frac{4}{1+1}=2$

Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x})$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$

<u>1.3 Два земечательных предела.</u>

1. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

Т.к. x→0, то $\lim\limits_{x\to 0}sinx=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ значит sinx~x

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{cos3x\times 5}=|sin3x\sim 3x|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{cos3x\times 5x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos3x}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e(1^\infty)$

Пример:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x}-\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

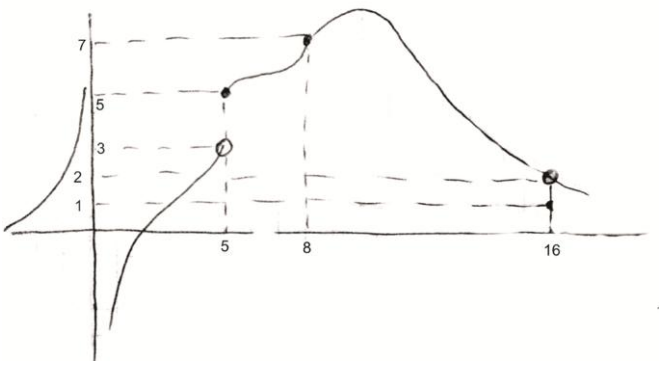
б) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$

по другому $\frac{2}{3x}=\frac{1}{t}$, тогда 2t=3x, x=$\frac{2}{3}t$

если x→∞ , то t→∞

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{\frac{2}{3}t}=e^{2/3}=\sqrt[3]{e^2}$$

1.4 Непрерывные функции и их свойства.



1) x=0
$\lim\limits_{x\to 0-0} y = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0+0} y = -\infty$

2) x=5
$\lim\limits_{x\to 5-0} y = 3$
$\lim\limits_{x\to 5+0} y = 5$
y(5)=5

3) x=8
$\lim\limits_{x\to 8-0} = 7$
$\lim\limits_{x\to 8+0} y = 7$
$\lim\limits_{x\to 8} y =$
7y(8)=7

4) x=16
$\lim\limits_{x\to 16-0} y = 1$
$\lim\limits_{x\to 16+0} y = 2$
y(16)=1

Определение 1

Функция называется непрерывной в точке x=a, если она определена в этой точке и предел функции в точке x=a равен значению функции в этой точке, т.е.

$\lim\limits_{x\to a} y(x) = y(a)$; x=8-точка непрерывности.

Определение 2

Функция y=y(x) называется непрерывной в точке x=a, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то такая функция называется непрерывной в этой области.

Свойства функций непрерывности в точке

1. Область непрерывности элементарной функции совпадает с её областью определения.
2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

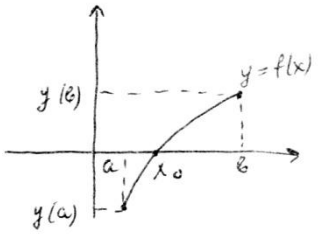
3. Если функции f(x) и g(x) непрерывны при x=a, то функции f(x)±g(x);f(x)×g(x); $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$ также непрерывны.

4. Если функция y=u(x) непрерывна в точке x=a, а функция y=f(u) непрерывна в точке u(a), то сложная функция y=(u(x)) непрерывна в точке x=a.

   Из пунктов 1-4 следует, что непрерывность в своей области определения, все функции, полученные из элементарных с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.

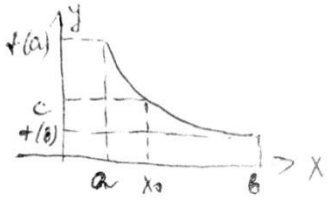
<u>Свойства функций, непрерывных на отрезке</u>

1.



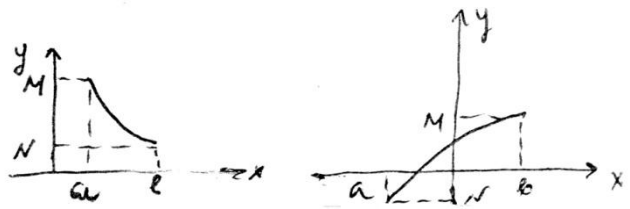
Пусть функция y=f(x) определена и непрерывна на [a, b] и принимает на его концах разные знаки, тогда $\exists x_0 \in [a, b]$, что f(x_0)=0.

2.



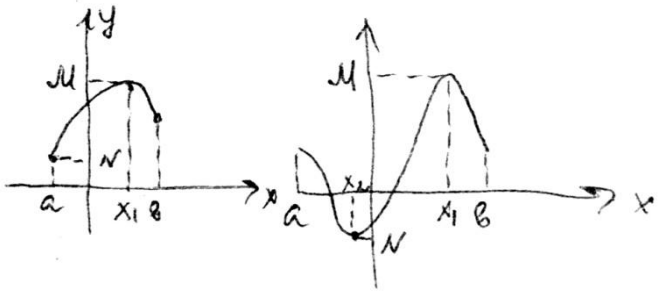
Пусть функция y=f(x) определена и непрерывна на отрезке [a, b], тогда для $\forall c$, заключенного между f(a) и f(b), существует $x_0 \in [a, b]$, что f(x_0)=c.

3.



Функция y(x) ограничена на отрезке [a,b] т.е. N$\leq f(x) \leq M$

4.



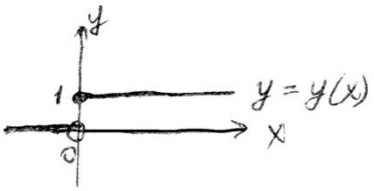
Функция принимает на [a,b] наибольшее M и наименьшее значение N, т.е. $\exists x_1, x_2 \in [a, b] => \forall x \in [a, b]$ следует, что f(x_1) $\leq f(x) \leq f(x_2)$

Примеры:

1) Доказать, что функция y=$3x^2+1$ непрерывна при $\forall x \in R$, пользуясь 1 и 2 определениями непрерывности.

<u>1 определение :</u>
D(y)=R; Пусть $a \in R$, тогда y(a)=$3a^2+1$,
$\lim_{x\to a}(3x^2+1) = 3a^3+1 = f(a)$, значит функция непрерывна при x=a по 1определению.
Т.к. x=a взяли произвольную, то данная функция непрерывная при $\forall x \in R$.
<u>2 определение:</u>
Дадим произвольной точке x приращение Δx, получим точку $x+\Delta x$.
Функция получит приращение $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (3(x+\Delta x)^2+1) - (3x^2+1) =$
$= 3x^2 + 6x \times \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 1 - 3x^2 - 1 = 6x \times \Delta x + 3(\Delta x)^2 = \Delta x(6x+3\Delta x)$
$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, итак функция непрерывна по 2 определению:

2) Доказать, что функция y(x)=$\begin{cases} 1, \text{при } x \geq 0 \\ 0, \text{при } x < 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке x=0.
Построить график.



y(0)=1
$\lim\limits_{x\to 0-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} 0 = 0$
$\lim\limits_{x\to 0+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} 1 = 1$, значит $\lim\limits_{x\to 0} \lg(x)$не существует.
Значит, функция не является непрерывной при x=0.

<u>1.5. Точки разрыва.</u>
Если условия непрерывности функции нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.
Если функция y=f(x) при x=a имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти $\lim_{x\to a+0} f(x)$ (правый предел) и $\lim_{x\to a-0} f(x)$ (левый предел). В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) Разрыв I рода, если существуют конечные левый и правый пределы.
2) Разрыв II рода, если хотя бы один из перечисленных пределов равен ±∞ или не существует.

Вернемся к рисунку:
1) x=0 - точка разрыва II рода.
2) x=5-_____I рода.
3) x=16-_____I рода.

<u>Пример:</u>

1. Найти точки разрыва и исследовать их характер
$$y = \frac{x}{x-3}$$
Данная функция определена при $\forall x \neq 3$. Эта функция является элементарной, она непрерывна при $\forall x \in D(y)$. Значит, единственной точкой разрыва является точка x=3.
$\lim_{x\to 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty$; $\lim_{x\to 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty$, x=3 точка разрыва II рода.

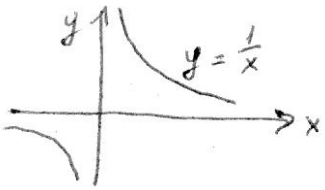
2. $y = \frac{x^2-4}{x+2}$; D(y)=(-∞;+∞)∪ $(-2;+\infty)$, функция непрерывна при $\forall x \in D(y)$.

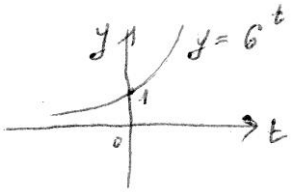
$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2+0}(x-2)=-4$$
$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2-0}(x-2)=-4$$
Значит x=-2 – точка разрыва I рода.

3. $\boldsymbol{y=\frac{5}{3+6^{\frac{1}{x}}}}$

1) D(y)=$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2) Функция y непрерывна при $\forall x\in D(y)$, т.к. получена из электронный функций.
3) $\lim_{x\to0-0}\frac{5}{3+6^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{3}$,т.к. $\lim_{x\to0-0}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim_{x\to0-0}6^{\frac{1}{x}}=0$.

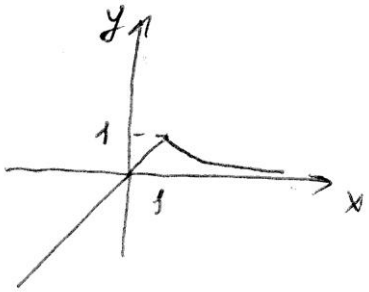
   $\lim_{x\to0+0}\frac{5}{3+6^{\frac{1}{x}}}=0$, т.к. $\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x}=+\infty$; $\lim_{x\to0+0}6^{\frac{1}{x}}=+\infty$





4) Доказать, что y=$\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{если } x\geq1\\ x, \text{если } x<1\end{cases}$

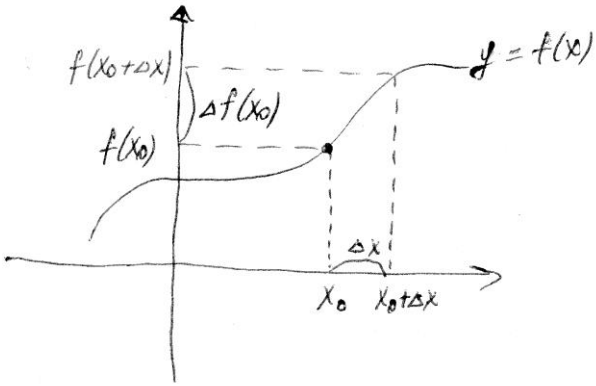
   Непрерывна при x=1, построить график:



1. y(1)=$\frac{1}{1}=1$
2. $\lim_{x\to1-0}y=\lim_{x\to1+0}x=1$
3. $\lim_{x\to1+0}y=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x}=1$, $\lim_{x\to1}y=1=y(1)$,

значит функция y непрерывна при x=1 по I определению.

<u>1.6 Понятие производной.</u>



Пусть функция y=f(x) определена на некотором множестве D.
Рассмотрим $\forall x_0\in D(y)$ дадим точке x_0 приращение $\forall x$, получим точку $x_0+\Delta x$
fx_0-значение функции при $x=x_0$
$f(x_0+\Delta x)$; $x=x_0+\Delta x$
Функция получила приращение
$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение: Производной функции y=f(x) в точке x_0 называется
$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$
Если x-произвольная точка $\in D(y)$, то
$y'(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется производной функции $y=f(x)$ в точке x.
Операция нахождения производной называется <u>дифференцированием.</u>
Примеры:

1) $y=c$ найти $y'(x)$

   $y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$, *т.е.* $c'=0$;

2) $y(x)=x$

   $y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$, *т.е.* $x'=1$

3) $y(x)=x^3$

   $y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$

   $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2=3x^2$ *т.е.* $(x^3)'=3x^2$

<u>Основные формулы дифференцирования.</u>

$c'=0$;
$x'=1$;
$(x^2)=2x$;
$(x^3)'=3x^2$;
$(x^n)'=n\times x^{n-1}$;
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

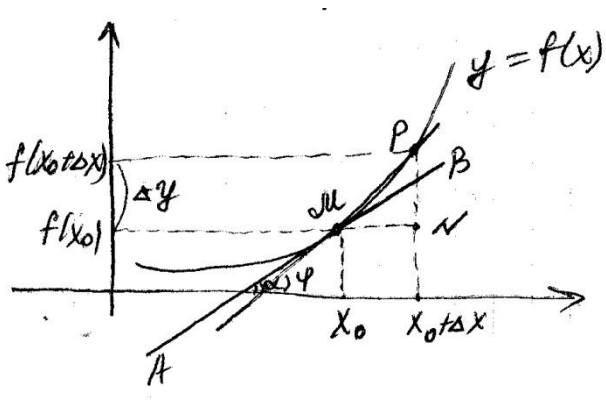
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$;
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\times lna}$;
$(lnx)'=\frac{1}{x}$;
$(a^x)'=a^x\times lna$;
$(e^x)'=e^x$;

$(cosx)'=-sinx$;
$(sinx)'=cosx$;
$(tgx)'=\frac{1}{cos^2x}$;
$(ctgx)'=-\frac{1}{sin^2x}$

<u>Основные правила дифференцирования.</u>

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
2. $(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$
   Следствие: $(c\times u)'=c\times u'$, где c-const
3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

<u>1.8 Геометрический смысл производной.</u>



Проведем через M и P секущую MP M
φ- угол между секущей и осью OX.
α- угол между касательной AB и осью X.

Если Δx→0, то MP→AB
угол φ=углу PMN, tg $\varphi=\frac{NP}{MN}=\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi=tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x_0)$$

tgα=y′(x_0) Итак, производная в точке равна угловому коэффициенту касательной (tgα) к графику функции *y=f(x)* в точке *M(x_0 ,f(x_0)).*
α – угол, который образует касательная с положительным направлением оси OX.

<u>1.8 Уравнение касательной</u>
y= kx+b –уравнение прямой.
k=f ′(x_0) – угловой коэффициент касательной.
Если $x=x_0$, то $y(x_0)=kx_0+b=>b=y(x_0)-y'(x_0)\times x_0$
Тогда $y=f'(x_0)\times x+y(x_0)-y'(x_0)\times x_0$
y-y(x_0)=f ′(x_0)×(x-x_0) – уравнение касательной

Пример:
Составить уравнение касательной к графику функции
$y=5x^2-\frac{5}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$

1) $y(x_0)=5-5=0$
2) $y'(x)=10x+\frac{5}{x^2}$; $y'(x_0)=10+5=15$
3) *y-0=5(x-1); y=5x-5 – уравнение касательной*

1.9 Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется по закону S=S(t), тогда на промежутке времени $[t_0, t_0+\Delta t]$ средняя скорость $v_{\text{ср}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-(t_0)}{\Delta t}$
$v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}=S'(t_0)$
Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки в любой момент времени есть производная от пути по времени t. В этом заключается физический смысл производной.
v(t)=S'(t) – скорость
a(t)=v'(t)=S''(t) – ускорение (вторая производная от пути S по времени t).

Пример:
Доказать что тело движется с постоянным ускорением.
$S(t)=5t^2-3t+10(\text{м}); t(c)$
v(t)=S'(t)=10t-3(м/с)
a(t)=v'(t)=10(м/с^2)- const

1.10 Обратная функция и её производная.

Функция *y=f(x)* и $y=f^{-1}(x)$ называются взаимно обратными, если
D(f)=E(f^{-1}) и *E(f)=D(f^{-1})*

Пример:
y=2x-3, обратная x=2y-3, т.е. y=$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой y=x.

Теорема:
Если функция y=f(x) имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция x=φ(y) также имеет в точке $y_0=f(x_0)$ производную, прчием φ'$(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

Пример:
y=sinx обратная x=siny, т.е. y=arcsinx (arcsinx)'=$\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Аналогично:
(arccosx)'=- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(arctgx)'=$\frac{1}{1+x^2}$; (arcctgx)'=- $\frac{1}{1+x^2}$

1.11 Сложная функция, ее производная.

y=f(u(x)) – сложная функция
Если функуия u имеет производную в точке x_0, а функция f имеет производную в точке ux_0 , то функция y=f(u(x)) имеет прозводную в точке x_0 и имеет место равенство:
$\boldsymbol{y'(x_0 = f'(u_0) \times u'(x_0)}$

Пример:
$y = \sqrt{cosx + 2}$, т.е. $y = \sqrt{u}$, где u=cosx+2.
y'=y'(u)×u'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times (cosx + 2)' = \frac{-sinx}{2\sqrt{cosx+2}}$

<u>1.12 Производная от функции, заданной неявно.</u>
Пример:

$x^2y + sinx \times lny + 5x^2 + 4y^3 = 0,$ функция задана неявно.
учитываем, что y=y(x);
$(x^2)' \times y + x^2 \times y' + (sinx)' \times lny + (sinx) \times (lny)' + (5x^2)' + (4y^3)' = 0$
$2xy + x^2y' + cosx \times lny + sinx \times y' \times \frac{1}{y} + 10x + 12y^2y' = 0$
$x^2y' + \frac{sinx}{y} \times y' + 12y^2 \times y' = -2xy - cosx \times lny - 10x$
$y' = \frac{-2xy - cosxlny - 10x}{x^2 + \frac{sinx}{y} + 12y^2}$

<u>1.13 Логарифмическое дифференцирование.</u>

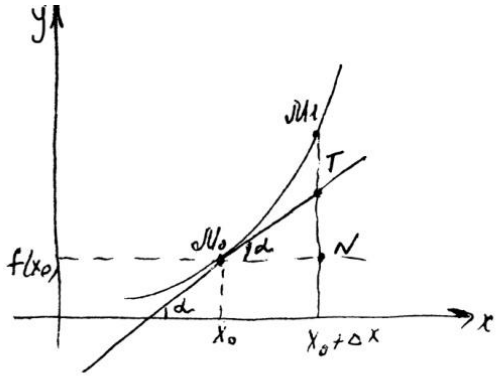
$y = k(x)^{v(x)} -$ показательно $-$ степенная функция
lny=lnU(x)$^{v(x)}$
lny=v(x)×lnU(x)
Дифференцируем обе части равенства
$\frac{1}{y} \times y' = v'(x) \times lnU(x) + \frac{v(x) \times U'(x)}{U(x)}$
$y' = U(x)^{v(x)} \times [v'(x) \times lnU(x) + \frac{v(x)}{U(x)} \times U'(x)]$
Решить:
1) y=x^x
2) y=$cosx^{lnx}$

<u>1.14 Понятие дифференциала, его геометрический смысл.</u>

Выражение вида f '×$\Delta x = dy(1)$ называется дифференциалом функции f в точке x.
Рассмотрим фунцию y=x, тогда dy=dx
dy=(x')×$\Delta x = 1 \times \Delta x = \Delta x$, значит $\Delta x = dx$
Тогда формула (1) принимает вид: dy=f '(x)×dx или dy=y'(x)×dx

<u>Геометрический смысл:</u>

Пусть y=f(x) дифференцируема в точке x_0. Проведем в (.) $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную.
$\Delta M_0TM -$ прямоугольный $NT = M_0N \times tg\alpha$
tgα=f '(x_0*),* $M_0N = \Delta x$
$NT = f'(x_0) \times \Delta x = \alpha(f(x_0))$



Теорема:
Дифференциал функции в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке M_0, соответствующему приращению её абсциссы x_0 на Δx.

Примеры:

1) $y=3^{sin^2x}dy-?$

$$y' = 3^{sin^2x} \times (sin^2x)' \times ln3 = 3^{sin^2x} \times ln3 \times 2sinx \times cosx = 3^{sin^2x} \times ln3 \times sin2x.$$

$$dy = 3^{sin^2x} \times ln3 \times sin2x \times dx$$

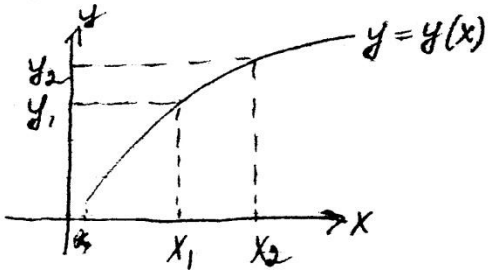
2) $y=ln5x+\sqrt{3x}$

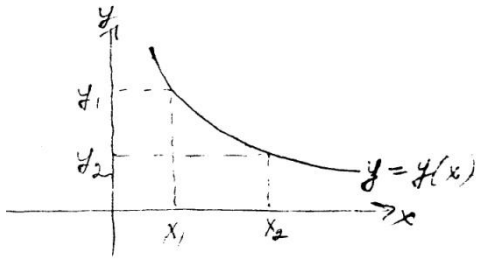
$$y'=\frac{5}{5x} + \frac{1}{2\sqrt{3x}} \times 3 = \frac{1}{x} + \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

$$dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2\sqrt{3x}}\right) = dx$$

ТЕМА №2 Применение производной.

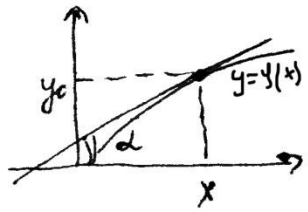
<u>2.1. Возрастание, убывание, экстремум функции.</u>





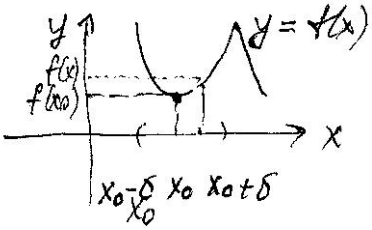
Определение:
Функция *y=y(x)* называется возрастающей (убывающей) на промежутке (*a*,*b*), если для $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ из того, что $x_1, < x_2$ следует, что $y_1 < y_2 (y_1 > y_2)$

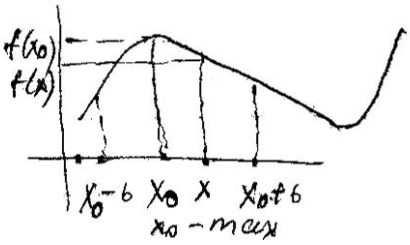
Теорема:
Для того чтобы функция, имеющая производную на (a,b) возрастала (убывала) на этом Промежутке необходимо и достаточно, чтобы $y'(x) > 0$ $[y'(x) < 0]$ для $\forall x \in (a, b)$



α- угол между качательной проведенной в точке(x_0, y_0) и осью OX $y'(x) = tg\alpha > 0$ (α – острый угол)
y=y(x) возрастающая функция.

Рассмотрим функцию *y=f(x)*

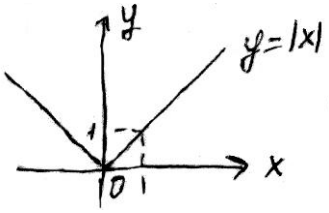




Определение:
Точка x_0 называется точкой точкой максимума (минимума), если ∃ окрестность точки x_0 $(x_0 - 6;\ x_0 + 6)$ такая что для $\forall x \in (x_0 - 6;\ x_0 + 6)$ выполняется неравенство:
$f(x_0) > f(x)[f(x_0) < f(x)]$

Определение:
Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема (необходимые условия экстремума):
Если x_0- точка экстремума, то $f\ '(x_0) = 0$



$|\mathbf{x}|=\begin{cases} x, \text{если } x \geq 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} =$
$= \pm 1$, однако, если предел существует, то он единственный, значит $f'(0)$ не существует. Однако *x=0* точка минимума.

Определение:
Точки, в которых производная равна 0 или не существует называется критическими точками 1го рода.
Точки экстремума надо искать среди критических точек 1го рода.

Теорема(первое достаточное условие экстремума):
Пусть функция *y=f(x)* непрерывна в точке x_0 и в окресности точки $x_0 \exists f'(x_0)$, кроме может быть самой точки.
Тогда, если при переходе через точку x_0 производная меняет знак

а) с „+” на „-“ , то x_0- точка максимума
б) с „-“ на „+” , то x_0- точка минимума

Теорема(второе достаточное условие):
Пусть функция y=f(x) определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , причем
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0,$ то если
$f''(x_0) > 0,$ то $x_0 - min$

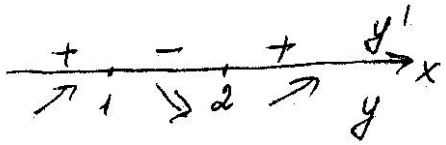
$f''(x_0) < 0$, то $x_0 - max$

Пример:

Исследовать на экстремум функцию $y = (2x+1) \times \sqrt[3]{(x-2)^2}$

1. *D(f)=R*
2. $y'(x) = \frac{10}{3} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$
3. $y'(x) = 0$ при $x = 1$
4. $y'(x)$ не $\exists$ при $x = 2$

   x=1, x=2 – критические точки 1го рода.

5. 

   $f_{max} = f(1) = 3;$
   $f_{min} = f(2) = 0;$
   (1;3) – точки max
   (2;0) – точки min

Пример 2:

$y = 2x^3 - 12x^2$

1. *D(y)=R;*
2. $y'(x) = 6x^2 - 24x$
3. $y'(x) = 0;\ 6x^2 - 24x = 0$

   $x^2 - 4x = 0$

   x(x-4)=0

   x=0; x=3 критические точки 1го рода
4. $f''(x) = 12x - 24$

   $f''(0) = -24 < 0 => x = 0 - max$

   $f''(4) = 12 \times 4 - 24 = 24 > 0 => x = 4 - min$

2.2 Выпуклость, точки перегиба

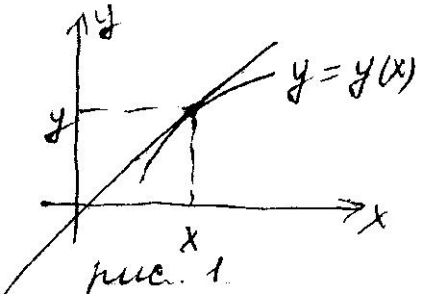


рис. 1

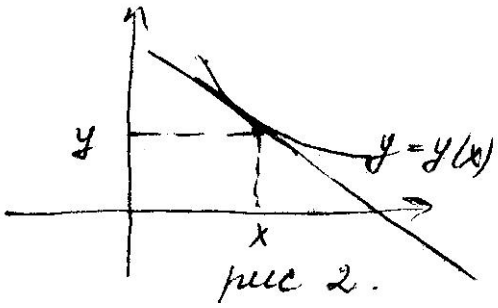


рис 2.

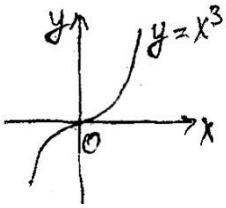
Определение:

График функции называется выпуклым вверх (рис 1) не (a,b) если он находится ниже касательной проведенной в произвольной точке и выпуклым вних (рис 2), если он расположен выше касательной.

Теорема:

Пусть функция определяется и дважды дифференцируема на (a,b).

Если $f''(x) < 0$ при $\forall x \in (a, b)$, то график функции имеет выпуклость вверх, если $f''(x) > 0$ имеет выпуклость вниз.

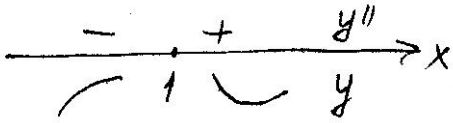


При $x > 0$ выпуклость вниз
При $x > 0$ выпуклость вверх
Значит *x=0* –точка перегиба- точка графика непрерывной функции, при переходе через которую кривая маняет направление выпуклости.

Теорема (необходимие условия):
Если x_0- точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

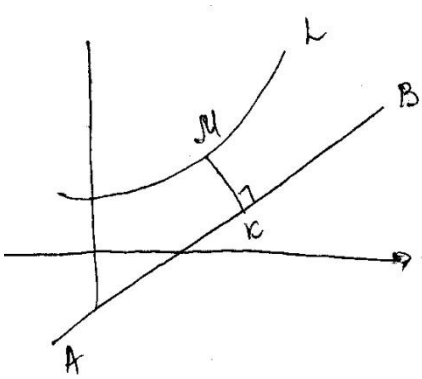
(достаточные условия):
Пусть $y = f(x_0)$ дважды дифференцируема на (a ,b) и $f''(x)$ меняет знак при переходе через $x_0 \in (a, b)$ то x_0-точка перегиба.

Пример:
$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ исследовать на выпуклость.
1) *D(y)=R*
2) $y' = 3x^2 - 6x + 2$
3) $y'' = 6x - 6$
4) $y'' = 0$; *6x-6=0*
   $x = 1$- критическая точка 2го рода.



x=1 т. перегиба, $y_{\text{пер}} = y(1) = 1 - 3 + 2 = 1$
при $x \in (-\infty; 1)$ функция имеет выпуклость вверх
при $x \in (1; +\infty)$ функция имеет выпуклость вниз

<u>2,3 Асимптоты графика функции.</u>



Определение:
Прямая AB называется асимптотой линии L, если расстояние MK от точки M линии L до прямой AB стремится к 0 при удалении точки M в бесконечность.

Виды асимптот:
1) *y=kx+b*- наклонная асимптота
   $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$
2) если *k=0*, то *y=b* – горизонтальная асимптота
3) если *k=*$\pm\infty$, то наклонной и горизонтальной асимптот нет
4) $\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, то *x=a*- вертикальная асимптота (*x=a*, обычно это точки разрыва).

Пример $y=\frac{3x^2+5}{x-2}$ найти асимптоты графика функции.

1. $y=kx+b$
   $k=lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x(x-2)}=lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{x^2-2x}=3$
   $b=lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2+5}{x-2}-3x)=lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5-3x^2+6x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+5}{x-2}=6$
   $y=3x+6$ – наклонная асимптота.
2. $D(y);\ x\neq 2$
   $x=2$ – вертикальная асимптота
   Ответ: $y=3x+6;\ x=2$

2.4 <u>Общая схема исследования функции.</u>

1.Область определения D(y);
2. Промежутки непрерывности и дифференцируемости;
3. Найти y′(x);
4. Критические точки 1го рода;
5. Промежутки монотонности, экстремум;
6. y″(x)
7. Критические точки 2го рода.
8. Промежутки выпуклости, точки перегиба.
9. Асимптоты.
10.дополнительные точки (если это необходимо) или точки пересечения с осями координат.
11. График 1

Пример:

$$y=\frac{x^2}{x-2}$$

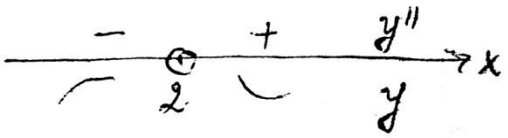
1) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2+\infty)$

2) Функция непрерывна и дифференцируема при $\forall x\in D(y)$

3) $y'(x)=\frac{2x(x-2)-1\times(x^2+5)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-5}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$

4) $y'=0;\ x^2-4x-5=0$
$x_1=5;\ x_2=-1$ - критические точки 1го рода.

5)

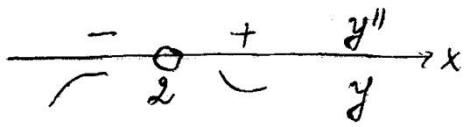


$y_{max}=y(-1)=\frac{6}{-3}=-2;\ y_{min}=y(5)=\frac{30}{3}=10$

6) $y''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x-5)}{(x-2)^4}=\frac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x-5)}{(x-2)^3}=$
$\frac{2x^2-4x-4x+8-xx^2+8x+10}{(x-2)^3}=\frac{10}{(x-2)^3}$

7) Критических точек 2го рода нет.

8)



При $x > 2,\ y'' > 0$ выпуклость вниз
При $x < 2,\ y'' < 0$ выпуклость вверх
x=2 точка разрыва, она не ясляется точкой перегиба.

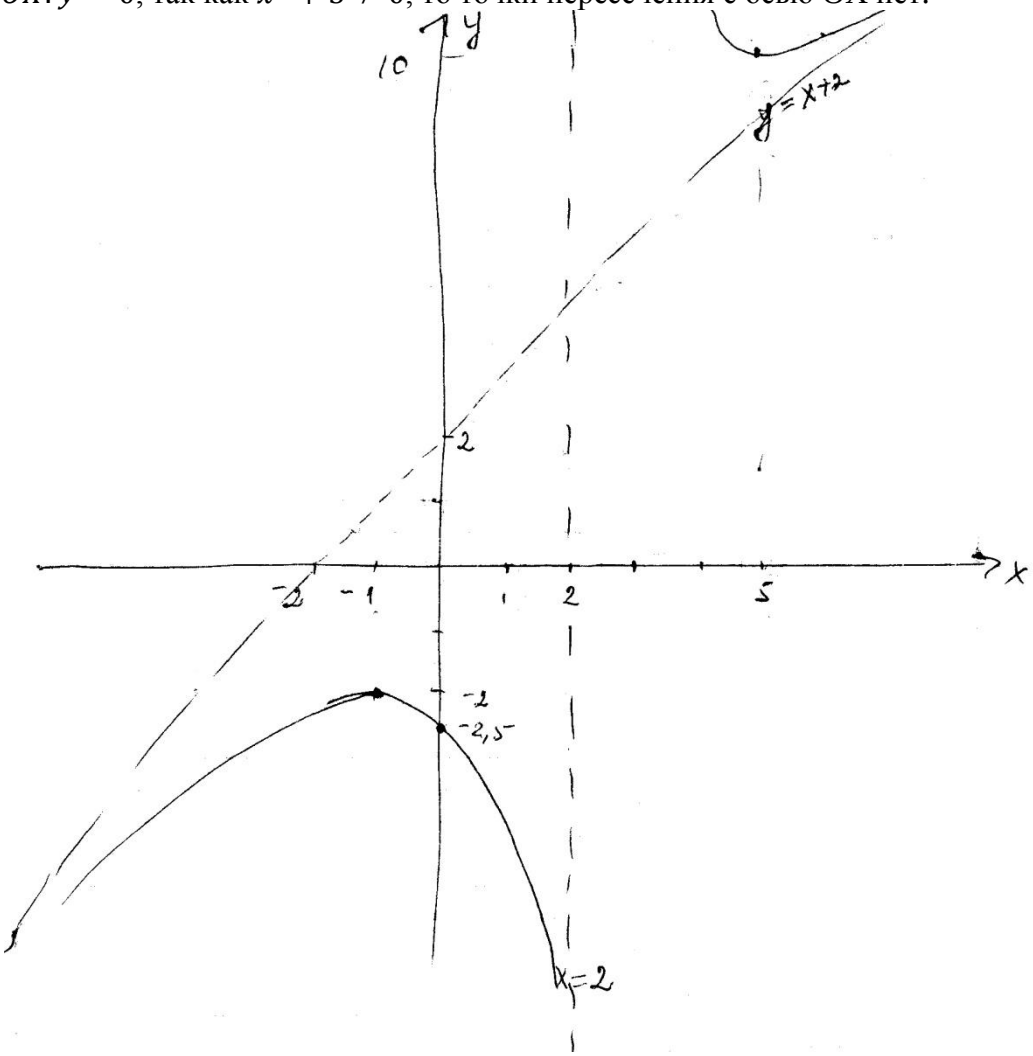
9)

а) x=2- вертикальная асимптота
б) y=kx+в – наклонная асимпота.

$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^2-2x} = 1$ в=$\lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x-2} - x\right) =$
$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x-2} = 2$
y=x+2 – наклонная асимптота.

10) $OY\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{-2} \end{cases}$ (0;-2,5)- точка пересечения с осью OY

$OX: y = 0$, так как $x^2 + 5 \neq 0$, то точки пересечения с осью OX нет.



Пример 2.
y=$12x^2 - 4x^3 + 1$

1) D(y)=R
2) ф. как в примере 1
3) $y'(x) = 24x - 12x^2$

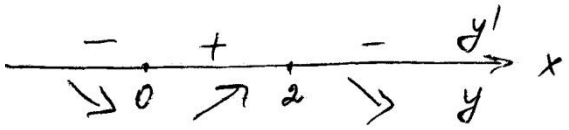
4) $y' = 0;\ 24x - 12x^2 = 0$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0; x = 2$

5)



x=0 – min ; x=2 – max

y=(0)=1; y(2)=$12 \times 4 - 4 \times 8 + 1 =$

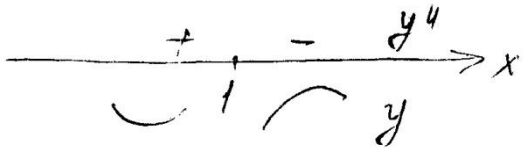
$48 - 32 + 1 = 17$

6) $y'' = 24 - 24x$

7) $y'' = 0 \quad 24 - 24x = 0$

x=1

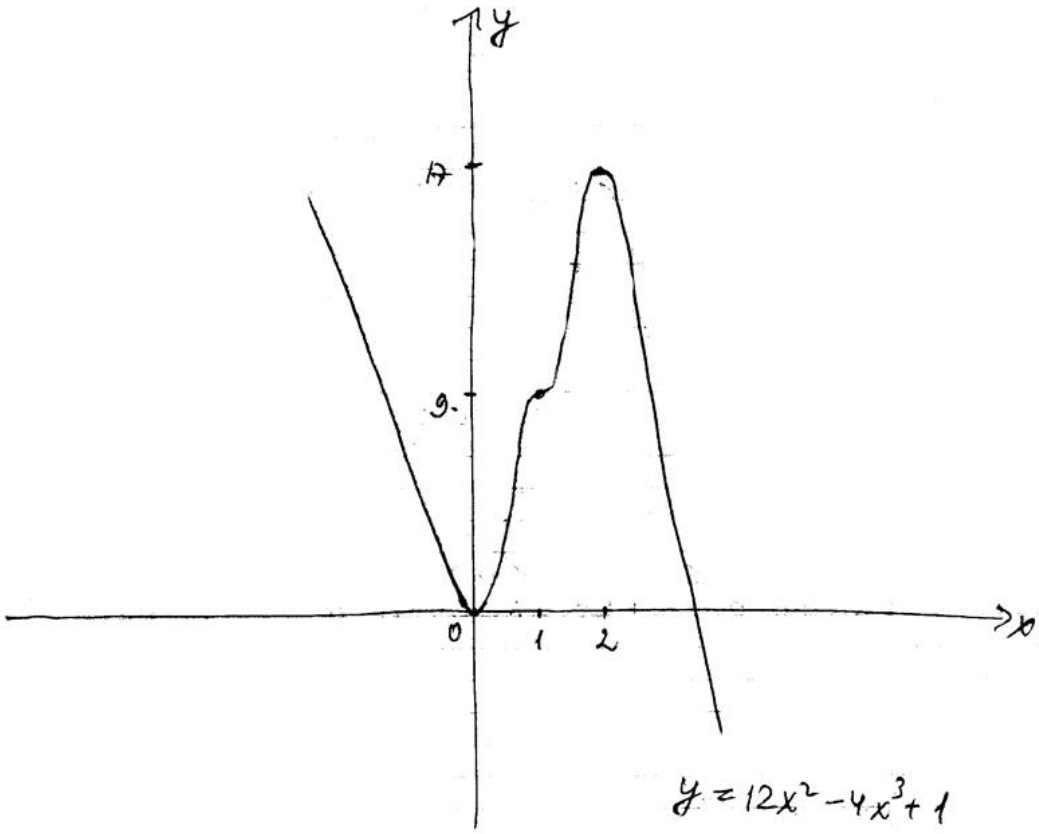
8)



x=1- точка перегиба

y(1)=12-4+1=9

9) асимптоты нет



2.5 **<u>Производные высших порядков. Формула Тейлора.</u>**

y' – производная первого порядка

y'' – производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной.
Производные, начиная со 2й называются производными высших порядков и обозначаются: y'', y''',$y^{(4)}$,$y^{(5)}$...$y^{(n)}$
Производная n-го порядко – это производная от производной (n-1) порядка.
<u>Пример.</u>
$y = e^{3x}$найти $y^{(n)}$
$y' = 3e^{3x}$
$y'' = 3^2e^{3x}$; $y''' = 3^3 \times e^{3x}$ ... $y^{(n)} = 3^n \times e^{3x}$
Пусть функция *y=y(x)* дифференцируема в точке x_o и имеет производную n-порядка, функцию можно представить в виде
y(x)=y$(x_o) + \frac{y'(x_o)}{1!}(x - x_o) + \frac{y''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \frac{y^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$
Данная формула называется формулой **Тейлора.**

Если взять $x_o = 0$, то получим функцию Маклорена.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \times x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

<u>Примеры</u>

1) $y = e^x$, $y(0) = e^0 = 1$
   $y'(x) = y''(x) = y'''(x) = \cdots = y^{(n)}(x) = e^x$
   $y'(0 = y''(0) = \cdots = y^{(n)}(0) = 1$, тогда
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
2) *y=sinx*
   $sin0 = 0$,*(sin)'*$= cosx, cos0 = 1$
   y''=(sinx)''=-sinx; *y''(0)=0*
   y'''=-cosx; *y'''(0)=-1*
   $y^{(4)} = sinx;$ $y^{(4)}(0) = 0$
   $y^{(5)} = cosx;$ $y^{(5)}(0) = 1$

   $$sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$
3) $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n \times x^{2n}}{(2n)!}$
4) $y = x \times e^x$
   $$x \times e^x = x \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots$$
5) $\frac{sinx}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ..\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$
6) $sinx^2 = y$ Замена в формуле (2) x на x^2 $sinx^2 = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots$

ТЕМА №3 Неопределенный интеграл.

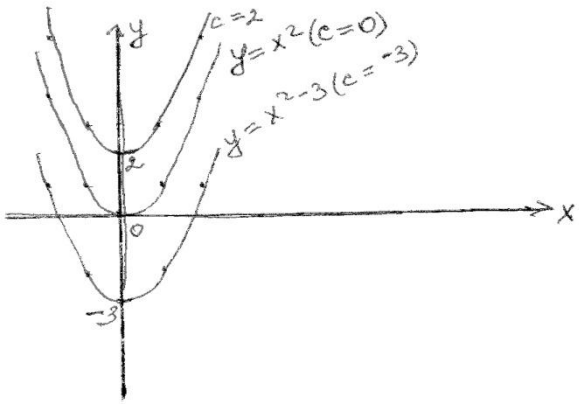
3.1 <u>Первообразная и неопределенный интеграл.</u>

Определение.
Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на некотором промежутке D, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство F'(x)=f(x).

Примеры.

1) *f(x)=gx* $F(x)=x^2+2$ действительно
   F'(x)=2x+0=2x=f(x) для $\forall x \in R$
2) *F(x)=sin*, тогда *f(x)=cosx*
   F'(x)=(sinx)'=cosx=f(x)

Теорема.
Если F(x) первообразная для функции f(x) на некотором множестве D, то любая другая первообразная может быть представлена в виде F(x)+c, где c- число.
Действительно, (F(x)+c)'=F'(x)+c'=f(x)+0=f(x).
Определение
Совокупность всех первообразных функции f(x) определенных на промежутке D, называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается
$\int f(x)dx = F(x) + c$
При этом функция f(x) называется подынтегральной функцией f(x)dx – подынтегральным выражением переменная x- переменной интегрирования.
Отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции называется интегрированием этой функции.
Интегрирование – это операция обратная дифференцированию.
$\int 2xdx = x^2 + c, \text{т.к.} (x^2 + c)' = 2x$



Назовем график функции y=F(x) (какой-либо первообразной) интегральной кривой.
Тогда , неопределенный интеграл – это семейство интегральных кривых, каждая из которых получается из любой другой кривой параллельным переносом вдоль оси OY (геометрический смысл).

ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$\int cdx = cx + c$

$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$

$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + c$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int sinxdx = cosx + c$

$\int cosxdx = sinx + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + c$

$\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + c$

$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + c$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

3.2 <u>Основные свойства неопределенного интеграла.</u>

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
   Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.
2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен
   $\int df(x) = f(x) + c$, где с – постоянная.

3. Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла
   $$\int c \times f(x)dx = c\int f(x)dx$$
4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.
   $$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
5. Если$\int f(x)dx = F(x)dx \pm \int g(x)dx$

3.3 <u>Способы вычисления неопределенного интеграла</u>

а) непосредственное интегрирование (использование таблицы и свойств).

Примеры.

1) $\int(3\sqrt{x}dx - 4\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int\frac{dx}{cos^2x} - 4\int\frac{dx}{x} = 3\times\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4arcsinx + 3tgx - 4ln|x| +$
$+c = 2x\sqrt{x} - 4arcsinx + 3tgx - 4ln|x| + c$

б) Интегрирование способом подстановки.

При интегрировании подстановкой вводится новая переменная с таким расчетом, чтобы получить один из табличных интегралов.

Найдя интеграл по новой переменной, надо возвратиться к первоначальной переменной и дать окончательный ответ.

Примеры

1) $\int\frac{5x^4+15x^2}{x^5+5x^3+1}dx = \left|\frac{t=x^5+5x^3+1}{dt=(5x^4+15x^2)dx}\right| = \int\frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln|x^5 + 5x^3 + 1| + c$

2) $\int\frac{x^2dx}{4x^3+1} = \left|\begin{matrix} t = 4x^3 \\ dt = 12x^2dx \\ x^2dx = \frac{1}{12}dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{12}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{12}ln|t| + c = \frac{1}{12}ln|4x^3 + 1| + c$

3) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2}} = \left|\begin{matrix} t = 1 - 2x^2 \\ dt = -4xdx \\ xdx = -\frac{1}{4}dt \end{matrix}\right| = -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\times 2\sqrt{t} + c = -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2} + c$

4) $\int e^{sinx}\times cosxdx = \left|\begin{matrix} sinx = t \\ dt = cosxdx \end{matrix}\right| = \int e^t dt = e^t + c = e^{sinx} + c$

5) $\int\frac{dx}{9+4x^2} = \int\frac{dx}{9(1+(\frac{2x}{3})^2)} = \left|\begin{matrix} t = \frac{2x}{3} \\ dt = \frac{2}{3}dx \\ dx = \frac{3}{2}dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}arcctgt + c = \frac{1}{6}arcctg\frac{2x}{3} + c$

в) Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям произведения.

$$\int udv = u\times v - \int vdu$$

Пользуясь формулой необходимо соблюдать требования чтобы dx обязательно входило в состав dv и чтобы через dv было обозначена такая функция, интеграл которой легко найти.

$$\int x^2 lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx \\ du = \frac{1}{x}dx; \end{matrix} ; \begin{matrix} dv = x^2dx \\ v = \int x^2dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = u \times v - \int v \times du = \frac{x^3}{3} \times lnx - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \times lnx - \frac{1}{9}x^3 + c$$

2) $\int arcsinx \times dx = \left| \begin{matrix} u = arcsinx; \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \end{matrix} \begin{matrix} dv = dx \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = u \times v - \int vdu = x \times arcsinx -$

$- \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ xdx = -\frac{1}{2}dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$, тогда

$$\int arcsimxdx = x \times arcsinx + \sqrt{1-x^2} + c$$

3) $\int e^x \times sinxdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^xdx; \end{matrix} ; \begin{matrix} dv = sinxdx \\ v = \int sinxdx \\ v = -cosx \end{matrix} \right| = u \times v - \int vdu = -e^x \times cosx +$

$+ \int cosx \times e^xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^xdx; \end{matrix} ; \begin{matrix} dv = cosxdx \\ v = sinx \end{matrix} \right| = -e^x \times cosx + e^x sinx -$

$- \int sinxe^xdx$

т.об.

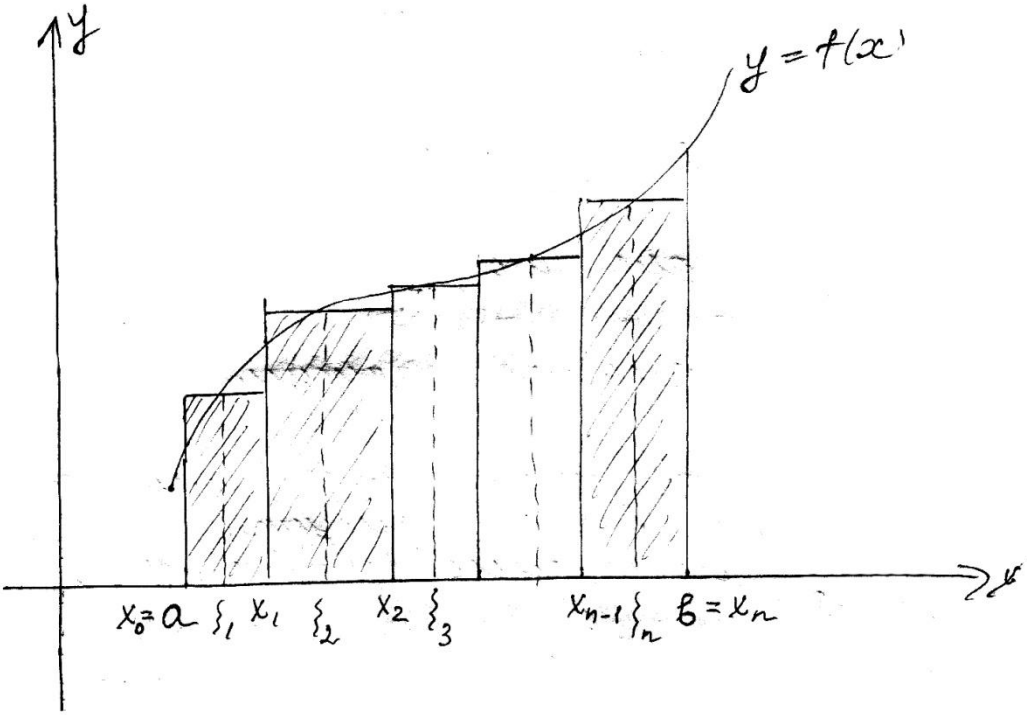
$$\int e^x \times sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx - \int e^x sinxdx$$

$$\int e^x sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx + c$$

$$\int e^x sinxdx = \frac{1}{2}e^x(sinx - cosx) + c$$

Тема №4 Определенный интеграл.

4.1.Понятие определенного интеграла, геометрический смысл.



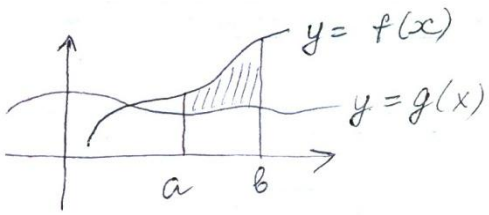
Пусть функция y=f(x) определена на [a;b]. Разобьем этот отрезок на n производных частей точками
$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
Обозначим Δxi – длина частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$. Рассмотрим i – середина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$. Построим прямоугольники с основаниями Δx_i; и высотами f($_i$). Тогда сумма площадей этих прямоугольников равна

$$S_{\text{пр}} = f(\quad_1) \times \Delta x + f(\quad_2) + \cdots + f(\quad_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\quad_i)\Delta x_i$$

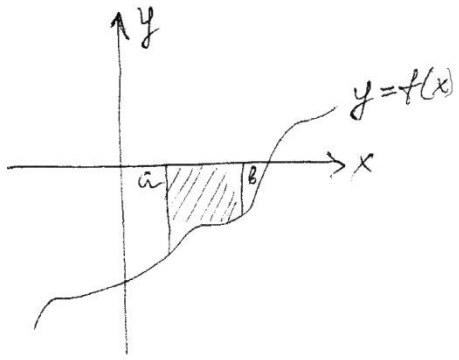
Эта сумма называется интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a;b]
обозначим $\lambda = max\Delta x_i$

<u>Определение</u>

Если существует предел (конечной) интегральной суммы при $\lambda \to 0$, то он называется определенным интегралом от функции f(x) по отрезку [a;b] и обозначается
$\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx = \lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\quad_i)\,\Delta x$
а – нижний предел интегрирования
в – верхний предел интегрирования
f(x) – подынтегральная функция.
При n (число разбиений)→ ∞, площадь прямоугольников $S_{\text{пр}} \to S_{\text{фигуры}}$ ограниченной линиями $y = f(x), y = 0, x = a, x =$ в
Значит
$\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла)



Фигура ограничена линиями
$y = f(x), y = g(x)\ , x = a, x =$ в тогда площадь фигуры $S = \int_{\text{а}}^{\text{в}} \big(f(x) - g(x)\big)dx$



$S_{\text{ф}} = \left|\int_{\text{а}}^{\text{в}} f(x)dx\right|$, т.к. f(x)<0 на отрезке [a;в]

<u>4.2 Свойства определенного интеграла</u>

1. $\int_{а}^{а} f(x)dx = 0$
2. $\int_{а}^{в} f(x)dx = -\int_{в}^{а} f(x)dx$
3. Каковы бы ни были числа а, в, с имеет место равенство
   $\int_{а}^{в} f(x)dx = \int_{а}^{с} f(x)dx + \int_{c}^{в} f(x)dx$
4. $\int_{а}^{в} с \times f(x)dx = с\int_{а}^{в} f(x)dx$, где с – число
5. $\int_{а}^{в} f\big((x) \pm g(x)\big)dx = \int_{а}^{в} f(x)dx \pm \int_{а}^{в} g(x)dx$

<u>4.3 Формула Ньютона-Лейбница</u>

$\int_{а}^{в} f(x)dx = F(x)\Big|_{а}^{в} = F(в) - F(a)$, где F(x)=$\int f(x)dx$

<u>4.4 Способы вычисления определенного интеграла</u>

1) Непосредственное интегрирование
   $\int_{1}^{2}\left(3e^{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx = (3e^{x} - \frac{4}{x})\Big|_{1}^{2} = \left(3e^{2} - \frac{4}{2}\right) - \left(3e^{1} - \frac{4}{1}\right) = 3e^{2} - 2 - 3e + 4 =$
   3e2−3e+2 , т.к.
   $\int\left(3e^{x} + \frac{4}{x}\right)dx = 3\int e^{x}dx + 4\int\frac{dx}{x} = 3e^{x} - \frac{4}{x}$

2) Интегрирование подстановкой
   $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

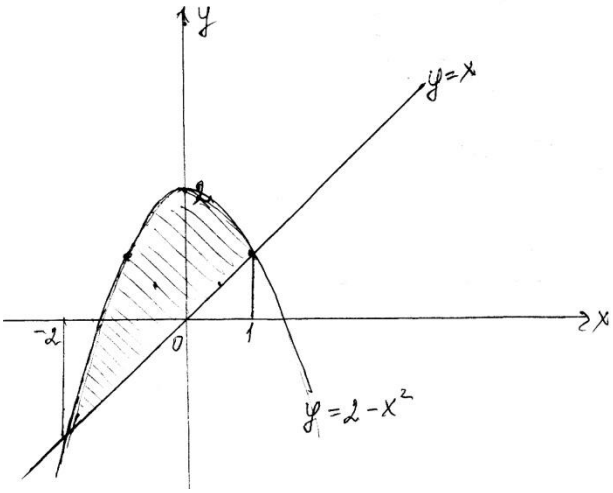
   <u>1способ</u>. Вычислим неопределенный интеграл
   $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x}, \text{тогда } x = t^2 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx, \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{matrix}\right| = \int\frac{2dt}{1+t^2} = 2arctgt = 2arctg\sqrt{x}$, тогда
   $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2arctg\sqrt{x}\Big|_{0}^{1} = 2(arctg1 - arctg0) = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$

   <u>2 способ.</u>
   $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ x = t^2 \\ \text{если } x = 0, t = \sqrt{0} = 0 \\ \text{если } x = 1, \text{то } t = \sqrt{1} = 1 \end{matrix}\right| = \int_{0}^{1}\frac{2dt}{1+t^2} = 2arctgt\Big|_{0}^{1} = 2(arctg1 -$
   arctg0=π2

3) Интегрирование по частям
   $\int_{а}^{в} udv = u \times v\Big|_{а}^{в} - \int_{а}^{в} v \times du$
   $\int_{1}^{2} xe^{x}dx = \left|\begin{matrix} u = x, dv = e^{x}dx \\ du = dx; v = e^{x} \end{matrix}\right| = x \times e^{x}\Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} e^{2} - 1e^{1} - e^{x}\Big|_{1}^{2} = 2e^{2} - e -$
   e2−e=2e2−e−e2+e=e2

<u>4.5 Геометрические приложения определенного интеграла</u>

1) Площадь плоской фигуры.(см.геометрический смысл).
   Пример: Вычислить $S_{ф}$, ограниченной линиями y=x, y=2-x^2
   Сделаем чертеж.



Найдем абсциссы точек пересечения прямой y=x и параболы y=2-x^2

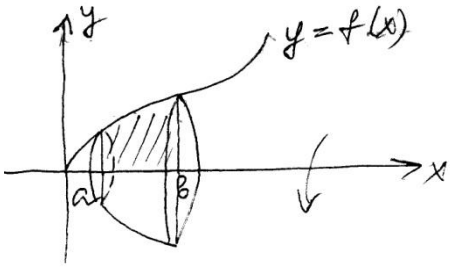
x=2-x^2

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = -2;\ \ x_2 = 1$ Это и есть пределы интегрирования.

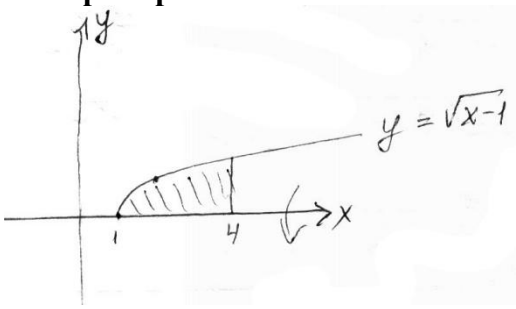
$$S = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

2) **Объем тела вращения**



V=$\pi \int_a^B y^2 dx$

Пример:



Найти V фигуры вращения.

$V = \int_1^4 (\sqrt{x-1})^2\, dx = \int_1^4 (x-1)dx = (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_1^4 = \left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 4 - 0{,}5 +$
$+1 = 4{,}5$

<u>4.6 Несобственный интеграл</u>

1) Интеграл вида $\int_a^{+\infty} b(x)dx$ называется несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$

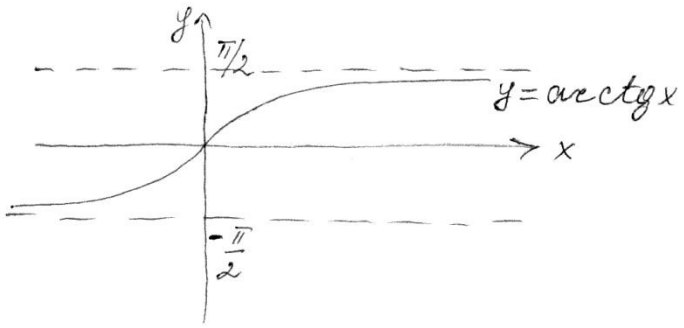
Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, а функцию f(x) называют интегрируемой на [a;+∞] если же предел не существует или равен ∞, то интеграл расходится

2) Аналогично, $\int_{-\infty}^{B} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{B} f(x)dx$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$
   c – произвольное число

Примеры

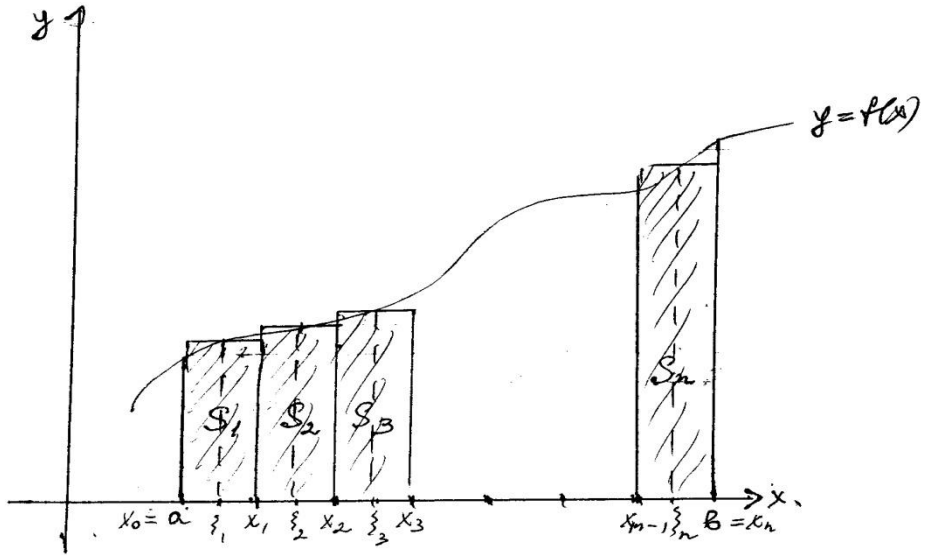
1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} cosxdx = \lim_{R\to\infty} sinx\Big|_{0}^{R} = \lim_{R\to\infty}(sinR - sin0) =$
$\lim R\to\infty sinR$ не существует, значит данный интеграл расходится.
2) $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} e^{-x}dx = -\lim_{R\to\infty} e^{-x}\Big|_{0}^{R} = -\lim_{R\to\infty}(e^{-R} - e^{0}) =$
$= -\lim_{R\to\infty} e^{-R} + 1 = 0 + 1 = 1$, интеграл сходится

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{1+x^2} =$
$=\lim a\to-\infty(arctgx0a)+\lim B\to+\infty(arctgxB0)=\lim a\to-\infty arctg0-arctga++\lim B$
$\to+\infty arctgB-arctg0=\lim a\to-\infty 0-arctga+\lim B\to+\infty arctgB-$
$0==-\lim a\to-\infty arctga+\lim B\to+\infty arctgB=--\pi 2+\pi 2=\pi$



4.7 Приближенное вычисление определенного интеграла

1) Формула прямоугольников.



Разобьем [a;B] на n равных частей.
$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots x_n = B$

$\Delta x = \frac{B-a}{n}$ – дина каждой части.

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$

$_i$ – середина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$

Построим прямоугольники, длиной Δx и высотой $f(\ \ _i)$

$S_ф = \int_a^B f(X)dx$

$S_ф \approx \sum_i S_{прям.i} = S_1 + S_2 + \cdots S_n$

тогда

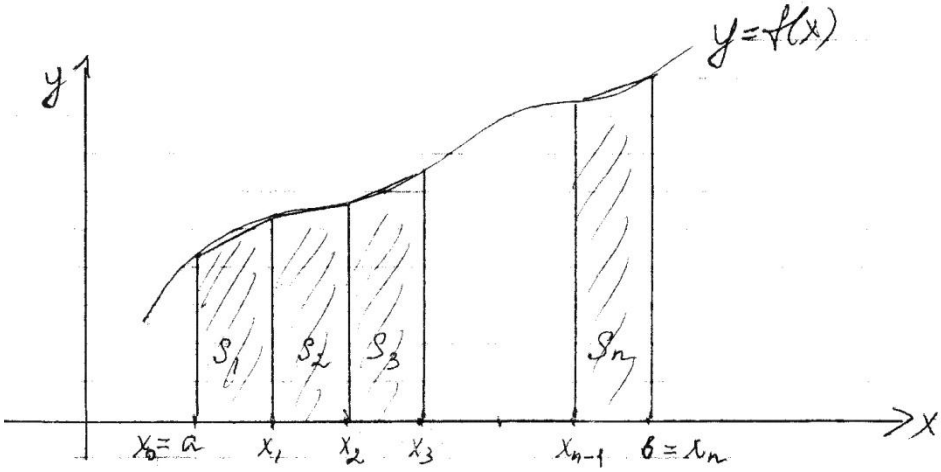
$\int_a^B f(x)dx \approx f(\ \ _1) \times \Delta x + f(\ \ _2) \times \Delta x + \cdots f(\ \ _n) \times \Delta x = (f(\ \ _1) + f(\ \ _2) + \ldots +$
$+ f(\ \ _n) \times \Delta x$

$_1 = a + \frac{\Delta x}{2}$

$_2 = \ \ _2 + \Delta x$

$_n = \ \ _{n-1} + \Delta x$

2) Формула трапеций



Построим трапеции с основаниями $f(x_{i-1}), f(x)$ и высотами $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 \ldots$

$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{f(a)+f(x_1)}{2} \times \Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \times \Delta x + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(B)}{2} \times \Delta x = (\frac{f(a)+f(B)}{2} +$
$+ f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) \times \Delta x \approx \int_a^B f(x)dx$ -формула трапеций.

<u>Дифференциальные уравнения.</u>

4.1) Основные понятия.

<u>Определение 1.</u> Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее независимую переменную x, функцию Y и ее производные $y', y'', y''', \ldots$

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ - общий вид ДУ

Примеры ДУ.

1) $2x - y'' - 5y' = \cos x$
2) $y'' = 2x$
3) $y''' - 3y' = \tan xy$

<u>Определение 2.</u> Порядком уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

$F(x, y, y') = 0$ - уравнение 1 порядка

$F(x, y, y', y'', y''') = 0$ - уравнение 3 порядка

<u>Определение 3.</u> Решением ДУ называется функция, которая обращает данное уравнение в тождество.

4.2) ДУ с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $f(x) \cdot dx + \varphi(y) \cdot dy = 0$ называется ДУ с разделяющимися переменными.

$f(x)dx = -\varphi(y)$, решаем уравнение интегрированием обеих частей

$\int f(x)dx = -\int \varphi(y)dy$

Пример. $y' + \frac{y}{x} = 0$ (1). Заметим, что $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, разделим переменные, получим уравнение

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln y = -\ln x + \ln c,$$

$$\ln y = \ln \frac{c}{x},$$

$$y = \frac{c}{x} \quad (2)$$

При различных значениях с равенство (2) определяет различные решения уравнения (1). Уравнение (1) имеет общее решение $y = \frac{c}{x}$, где с – число.

Общее решение называют общим интегралом.

Если с=1, то y = $\frac{1}{x}$, если с=3 , то y = $\frac{3}{x}$, частные решения ДУ (1).

Частные решения или частные интегралы ДУ получаются из общих решений при наличии начальных условий. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, называется задачей Коши. В случае ДУ 1 порядка задача Коши ставится так: найти частное решение y = y(x) уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Пример. Найти частное решение ДУ $2y' \cdot \sqrt{x} = y$ при условии y(9)=1

Решение. $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{2\sqrt{x}\, dy}{dx} = y$, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $\ln y = \sqrt{x} + c$ - общее решение ДУ

Или y $= e^{\sqrt{x}+c} = e^{\sqrt{x}} \cdot e^{c}$, обозначим $e^{c} = c_1$, $y = c_1 e^{\sqrt{x}}$, $y(9) = 1$, т.е. $1 = c_1 e^{\sqrt{9}}$,

$$1 = c_1 e^{3},$$

$$c_1 = e^{-3},$$

$y = e^{\sqrt{x}-3}$ - частное решение, удовлетворяющее условию y(9)=1.

Пример. Решить уравнение $\frac{y'}{\cos x} - 3\sqrt{y} = 0$,

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{\cos x dx} = 3\sqrt{y}\,,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 3\cos x\, dx\,,$$

$2\sqrt{y} = 3\sin x + c$ - общее решение ДУ или

$$\sqrt{y} = \frac{3}{2}\sin x + \frac{c}{2}\,,$$

$$\sqrt{y} = \frac{3}{2}\sin\ \ x + c_1\,,$$

$$y = (\frac{3}{2}\sin x + c_1)^2.$$

4.3) Однородные ДУ.

ДУ, которые можно привести к виду $y' = f(\frac{y}{x})$, называются однородными.

Для интегрирования таких уравнений применяем подстановку $\frac{y}{x} = t\,, y = tx, dy = tdx + xdt$

Эта подстановка приводит к ДУ относительно x и t, в которых переменные разделяются, после чего уравнение можно интегрировать. Для получения окончательного ответа надо переменную t заменить на $\frac{y}{x}$.

Пример. $x^2dy + y^2dx = xydy$

Замена $y = tx\,, dy = tdx + xdt\,,$

$$x^2(tdx + xdt) + t^2x^2dx = x \cdot tx(tdx + xdt)\,,$$

$$x^2tdx + x^3dt + t^2x^2dx = x^2t(tdx + xdt)\,,$$

$$x^2tdx + x^3dt + t^2x^2dx - t^2x^2dx - \mathrm{x}^3\mathrm{tdt} = 0\,,$$

$$x^2tdx + x^3dt - x^3tdt = 0 \mid : x^2,$$

$$tdx + xdt - xtdt = 0\,,$$

$$xdt - xtdt = -tdx\,,$$

$$x(1-t)dt = -tdx \ \mid \cdot (-1)\,,$$

$$x(t-1)dt = tdx\,,$$

$$\frac{(t-1)dt}{t} = \frac{dx}{x}\,,$$

$$\int \frac{(t-1)dt}{t} = \int \frac{dx}{x}\,,$$

$$\int dt - \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}\,,$$

$$t - \ln t = \ln x + \ln c\ \,, t = \frac{y}{x},$$

$\frac{y}{x} - \ln\frac{y}{x} - \ln x = \ln c$,

$\frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x}\cdot x\right) = \ln c$,

$\frac{y}{x} - \ln y = \ln c$, $\frac{y}{x} = \ln(cy)$, $cy = e^{\frac{y}{x}}$, $y = \frac{1}{c}e^{\frac{y}{x}}$, $\frac{1}{c} = c_1$, $y = c_1 e^{\frac{y}{x}}$ - общее решение ДУ.

Пример. $y'(x+y) = y$, $dy(x+y) = ydx$,

$(xdt + tdx)(x + xt) = xtdx$,

$x^2dt + x^2tdt + xtdx + xt^2dx - xtdx = 0$,

$x^2dt + x^2tdt + xt^2dx = 0 \,|: x$,

$xdt + xtdt + t^2dx = 0$,

$x(1+t)dt = -t^2dx$,

$\frac{1+t}{2}dt = -\frac{dx}{x}$, $\int\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt = -\int\frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{t} + \ln t = -\ln x + \ln c$, $-\frac{x}{y} + \ln\frac{y}{x} = \ln\frac{c}{x}$,

$-\frac{x}{y} = \ln\frac{c}{x} - \ln\frac{y}{x}$, $-\frac{x}{y} = \ln\left(\frac{c}{x}\cdot\frac{x}{y}\right)$, $-\frac{x}{y} = \ln\frac{c}{y}$ - общее решение ДУ.

4.4) Линейные ДУ.

ДУ 1-го порядка называется линейным, если оно содержит искомую переменную y и ее производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Такие уравнения имеют вид: $y' + y\cdot f(x) = F(x)$

1) Если F(x)=0, то уравнение называется однородным (ЛДОУ)
2) Если F(x)$\neq$ 0, то неоднородным.
   Пример.
   $y'x + 2y = x^3$ (1) – неоднородное ДУ.
   $y'x + 2y = 0$ (2) – ЛДОУ.
   Решаем уравнение (2). $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}\cdot x = -2y$, $\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dy}{y} = -2\int\frac{dx}{x}$, $\ln y = -2\ln x + \ln c$,

$\ln y = \ln\frac{c}{x^2}$, $y = \frac{c}{x^2}$ - общее решение уравнения (2).

Ищем общее решение уравнения (1) в виде $y = \frac{c(x)}{x^2}$ (3) , где c = c(x) – функция от переменной x.

Найдем $y' = \frac{c'\cdot x^2 - 2xc}{x^4} = \frac{x(c'x - 2c)}{x^4} = \frac{c'x - 2c}{x^3}$.

Подставим y, y' в уравнение (1), получим уравнение $\frac{(c'x-2c)\cdot x}{x^3}+\frac{2c}{x^2}=x^3$,

$$\frac{c'x-2c}{x^2}+\frac{2c}{x^2}=x^3,\quad \frac{c'}{x}-\frac{2c}{x^2}+\frac{2c}{x^2}=x^3,$$

$$\frac{c'}{x}=x^3,\ c'=x^4, c=\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+c_1\ \ (4)$$

Подставим в формулу (3) вместо С её значение (4), получим общее решение уравнения (1)

$$y=\frac{\frac{1}{5}x^5+c_1}{x^2}=\frac{1}{5}x^3+\frac{c_1}{x^2}.$$

Пример.

$y'+2xy=e^{-x^2}$ (1) ЛДУ неоднородное

$y'+2xy=0$ (2) ЛДОУ.

Решаем (2) $\frac{dy}{dx}=-2xy$, $\int\frac{dy}{y}=-2\int xdx$, $\ln y=-x^2+c$, $y=e^{-x^2+c}=e^{-x^2}\cdot e^c=c\cdot e^{-x^2}$,

Получим общее решение уравнения (2) $y=ce^{-x^2}$

Ищем общее решение уравнения (1) в виде $y=c(x)\cdot e^{-x^2}$

Найдем $y'=c'\cdot e^{-x^2}+c\cdot\left(e^{-x^2}\right)'=c'e^{-x^2}-2xce^{-x^2}$,

Подставим в (1) y и y' , получим $c'e^{-x^2}-2xce^{-x^2}+2xce^{-x^2}=e^{-x^2}$

$$c'e^{-x^2}=e^{-x^2}\quad |:e^{-x^2}$$

$$c'=1,\ \text{т.е. } \frac{dc}{dx}=1,\ dc=dx,\ c=\int dx=c_1+x.$$

Значит, общее решение уравнения (1) имеет вид: $y=c(x)\cdot e^{-x^2}=(c_1+x)e^{-x^2}$ или

$$y=c_1e^{-x^2}+xe^{-x^2}.$$

4.5) Решение ДУ II порядка методом понижения порядка.

$$y''=f(x)$$

Замена $y'=z(x)$, тогда $y''=z'(x)$, т.е. получим уравнение $z'(x)=f(x)$, которое решается как уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dx}=f(x)\ ,\ dz=f(x)dx\ ,\ z=\int f(x)dx\ ,\ \text{т.к. } z=y', \text{то } y'=\int f(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx,$$

$y = \int(\int f(x)dx)dx$ - общее решение.

Пример. $y'' = \sin x$

Замена $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$,

Имеем $z'(x) = \sin x$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dz}{dx} = \sin x$, $dz = \sin\ xdx$, $z = \int \sin x\, dx = -\cos x + c$,

$z = y'$, значит $y' = -\cos x + c$, $y = \int(-\cos x + c) = -\sin x + cx + c_1$ -общее решение первоначального ДУ.

Пример.

$y'' = 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2}$, $z = y'$, $z' = y''$, тогда

$z' = 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2}$, $dz = \left(3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx$, $z = 3\int \sqrt{x}dx + 5\int \frac{dx}{x^2}$

$z = 3 \cdot \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{5}{x} + c = 2x\sqrt{x} - \frac{5}{x} + c,$

$y' = 2x\sqrt{x} - \frac{5}{x} + c$, $dy = \left(2x\sqrt{x} - \frac{5}{x} + c\right)dx = \left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{x} + c\right)dx,$

$y = 2\int x^{\frac{3}{2}} - 5\int \frac{dx}{x} + c\int dx = 2 \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 5\ln|x| + cx + c_1$,

$y = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - 5\ln|x| + cx + c_1$ - общее решение.

4.6) Линейные однородные ДУ II порядка с постоянными коэффициентами.

Общий вид данных уравнений $y'' + py' + qy = 0$ (1) , p, q - любые действительные числа.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, решая его, найдем корни k_1, k_2.

При этом могу быть три различных случая:

1) k_1, k_2 - действительные, различные $(k_1 \neq k_2)$, общее решение уравнения (1) имеет вид $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные.
2) $k_1 = k_2 = k$, общее решение уравнения (1) имеет вид $y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$.
3) k_1, k_2 – комплексные, т.е. $k_{1,2} = a \pm bi$

$y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$, в частном случае, если $a = 0$,то $y = c_1\cos bx + c_2\sin bx$.

Частное решение получается из общего решения при наличии начальных условий.

В случае ДУ II порядка задача Коши ставится так: найти частное решение уравнения, удовлетворяющего условиям: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0{}' \end{cases}$ или если $x_0 = 0$, то $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0{}'$

Пример.

Решить уравнение $y'' + 3y' - 4y = 0$ (2) при начальных условиях $y(0) = 5,\ y'(0) = 20$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 3k - 4 = 0$ (1)

$k_1 = 4,\ k_2 = -1$ - корни уравнения (1) , тогда общее решение записывается так:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} \quad (3)$$

Найдем частное решение. Вычислим $y' = 4c_1 e^{4x} - c_2 e^{-x}$

$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = 5 \\ 4c_1 e^0 - c_2 e^0 = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ 4c_1 - c_2 = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

Подставим $c_1 = 5,\ c_2 = 0$ в формулу (3) , получим $y = 5e^{4x} + 0 \cdot e^{-x} = 5e^{4x}$

$y = 5e^{4x}$ - частное решение.

Пример.

Решить уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$ (1) при начальных условиях $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

$k^2 + 4k + 13 = 0$ (2)

$k_1 = -2 + 3i$, $k_2 = -2 - 3i$, $a = -2$, $b = 3$, тогда общее решение записывается так: $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

Найдем частное решение, для этого вычислим

$y' = (u \cdot v)' = u'v + uv' = -2e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-2x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$,

$$\begin{cases} y(x_0) = 4 \\ y'(x_0) = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -2e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(-3c_1 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 4 \\ e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 2 \end{cases},$$

$\begin{cases} -2c_1 + 3c_2 = 4 \\ c_1 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$, Частное решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = e^{-2x}(\tfrac{8}{3}\cos 3x + 2\sin 3x).$$

Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$ (1) при начальных условиях $y(0) = 6,\ y'(0) = 10$

$k^2 - 6k + 9 = 0$ (2) , D=0 , $k_1 = k_2 = 3$,

Общее решение ДУ (1) имеет вид: $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = e^{3x}(c_1 + xc_2)$,

$$y' = 3e^{3x}(c_1 + xc_2) + e^{3x} \cdot c_2 ,$$

$\begin{cases} y(0) = 6 \\ y'(0) = 10 \end{cases}$, $\begin{cases} e^0(c_1 + 0 \cdot c_2) = 6 \\ 3e^0(c_1 + 0c_2) + e^0 \cdot c_2 = 10 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1 = 6 \\ 3c_1 + c_2 = 10 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = 4 \end{cases}$,

Частное решение уравнения (1) имеет вид: $y = e^{3x}(6 + 4x)$.

4.7) ДУ в полных дифференциалах.

Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ или $P'_y = Q'_x$

Тогда общее решение записывается так: $F(x,y) = c$, c- число. F - первообразная выражения $Pdx + Qdy$, т.е. $\int(Pdx + Qdy) = c$ - общее решение.

Пример.

$$\frac{x^2-y}{x^2}dx + \frac{x+1}{x}dy = 0 \quad (1)$$

Обозначим $P(x,y) = \frac{x^2-y}{x^2}$; $Q(x,y) = \frac{x+1}{x}$,

1) Проверим, что это уравнение в полных дифференциалах.

$P(x,y) = \frac{x^2-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 1 - \frac{y}{x^2}$; $Q(x,y) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$,

Вычислим P'_y , Q'_x

$P'_y = \left(1 - \frac{y}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $Q'_x = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $P'_y = Q'_x$ - значит (1) ДУ в полных дифференциалах.

2) $\int P(x,y)dx = \int(1 - \frac{y}{x^2})dx = x + \frac{y}{x}$ $(y - const)$ (2)

$\int Q(x,y)dy = \int(1 + \frac{1}{x})dy = y + \frac{y}{x}$ $(x - const)$ (3)

3) Складываем выражения (2) и (3), берем каждое выражение по одному разу.

$x + \frac{y}{x} + y = c$ - общее решение ДУ (1).

Пример.

$(x + y + 1)dx$+(x- $y^2 + 3)dy = 0$ (1)

1) Проверим, что ДУ (1) в полных дифференциалах

$P'_y = (x + y + 1)'_y = 1$, Q'_x =(x− $y^2 + 3)'_x = 1$, $P'_y = Q'_x$

2) Вычислим. $\int(x + y + 1)dx = \frac{x^2}{2} + yx + x$ (2)

$\int$(x− $y^2 + 3)dy = xy - \frac{y^3}{3} + 3y$ (3)

3) (2)+(3) $\frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y = c$ - общее решение.

4.8) Задачи, приводящие к решению ДУ.

1. Найти закон движения тела по оси ox, если оно начало двигаться из точки $M(4;0)$ со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

Решение. Пусть x - путь, тогда согласно физическому смыслу производной

$\frac{dx}{dt} = v(t)$, $\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2$, $dx = (2t + 3t^2)dt$, $x = \int(2t + 3t^2)dt$, $x = t^2 + t^3 + c$ Постоянную c найдем из условия, что тело начало двигаться из точки $M(4; 0)$ $x = 4, t = 0$; $4 = 0^2 + 0^3 + c$, $c = 4$, тогда $x = t^2 + t^3 + 4$ - закон движения тела.

2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $N(2; -1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{2y}$.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной $k = \tan \propto = y'(x_0)$.

Значит $y'(x) = \frac{1}{2y}$, т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$.

Разделим переменные, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2}$; $\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int dx$; $\ln y = \frac{1}{2}x + c$;

$y = e^{\frac{x}{2}+c} = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^c = c_1 e^{\frac{x}{2}}$, где $c_1 = e^c$

Таким образом уравнение кривой $y = c_1 e^{\frac{x}{2}}$.

5. Ряды

5.1. Понятие числового ряда, его суммы.

Определение.

Числовым рядом называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, в котором $a_1, a_2, \ldots$ (члены ряда) определенные числа, для которых известен закон, позволяющий определить каждый член a_n по заданному номеру n.

Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ называется частичной суммой ряда.

Определение.

Если существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся. Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен $\mp\infty$, то ряд называется расходящимся.

5.2. Основные свойства рядов.

- Если ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$ сходится и его сумма равна S, то ряд (2)
  $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots = c \cdot S$ сходится и его сумма равна $c \cdot S$, c-число, $c \neq 0$
  Если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.
- Если ряды сходятся и их суммы равны $S_1 и\, S_2$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S_1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = S_2$$, то ряд

$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$ сходится и его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

Т.е. сходящиеся ряды можно почленно складывать.

- Если в ряде (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ приписать к началу (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд будет сходиться, если ряд (1) сходится и расходится, если ряд (1) расходится.

5.3. Теорема Ферма (необходимый признак сходимости).
Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
Если этот ряд сходится, то $\lim_{n\to+\infty} a_n$ =0.

<u>Пример.</u> Доказать, что ряд расходится

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^4-8n^2+2}{-5n^4+2n+1}$,

$a_n=\frac{3n^4-8n^2+2}{-5n^4+2n+1}$,

Найдем $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-8n^2+2}{-5n^4+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^4}{n^4}-\frac{8n^2}{n^4}+\frac{2}{n^4}}{\frac{-5n^4}{n^4}+\frac{2n}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{8}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{-5+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = -\frac{3}{5} \neq 0$,
необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

<u>Примеры сходящихся и расходящихся рядов.</u>

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ - геометрический ряд
Если $|q| < 1$, то ряд сходится и сумма S = $\frac{a}{1-q}$.
Если $|q| \geq 1$, то ряд расходится.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ - гармонический ряд,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, однако ряд расходящийся.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots$ - обобщенный гармонический ряд.
Если k> 1, то ряд сходится.
Если k< 1, то ряд расходится.

<u>Примеры на вычисление суммы ряда.</u>

1) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
$S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$
$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})$=1-0=1, таким образом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ - геометрический ряд, где $q = \frac{1}{2}$, $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

3) $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-4}} + \cdots$

Данный ряд получается из ряда (2) умножением каждого члена ряда (1) на 2^4, следовательно, ряд (3) сходится и его сумма $S_3 = S_2 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$.

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = 2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \cdots + \frac{2^n+3^n}{6^n} + \cdots$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

$S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, $\quad S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

5) (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \cdots$

Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 \mp \frac{2^n+1}{2^n})$

Ряд (1) расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 + 1 + \cdots + 1) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$,

Ряд (2) расходится, т.к.

$S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$

$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Рассмотрим ряд (1)+(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2^n+1}{2^n}\right) = (1 + \frac{3}{2}) + \left(1 + \frac{5}{4}\right) + \cdots$ - данный ряд расходится

(1)-(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2^n+1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2^n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^n}$, ряд расходится как геометрический.

5.4. Признаки сходимости рядов с положительными членами.

1) <u>Признак сравнения</u>

Рассмотрим ряды:

(1) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \ , u_n > 0.$

(2) $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \ , v_n > 0.$

Если ряд (2) сходится, а члены ряда (1), начиная с некоторого номера, меньше соответствующих членов ряда (2), т.е. $u_n \le v_n$, то ряд (1) сходится.

Если ряд (2) расходится и $u_n \ge v_n$, начиная с некоторого номера, то ряд (1) расходится.

Пример. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$

(2)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

Ряд (2) сходится как геометрический, q = $\frac{1}{2} < 1$

При $n \ge 3$ выполняются неравенства $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}$; и т.д.

Значит ряд (1) сходится.

2) <u>Признак Даламбера</u>

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k.$

Если $k < 1$, то ряд сходится.

Если $k < 1$, то ряд расходится.

Если $k = 1$, то требуется дополнительное исследование.

Примеры: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

$a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$; $a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+1}{3n+5}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5} \cdot \frac{3n+2}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}} \cdot$

$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1;$

Дополнительное исследование: Найдем $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$, необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд (1) расходится.

(2)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}$

$a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} = \frac{2^n \cdot 2}{n^2+2n+2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2^n \cdot 2}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{2^n}) =$

$2 \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{n^2+2n+2} =$

$=2\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = 2 \cdot 1 = 2 > 1$, по признаку Даламбера ряд (2) расходится.

<u>Пример</u>. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$.

$a_n = \frac{n^5}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$;

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} (\frac{n+1}{n})^5 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^5 = \frac{1}{2} \cdot 1 =$

$\frac{1}{2} \left(k = \frac{1}{2}\right)$.

Так как k< 1, то, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

3)<u>Радиальный признак Коши.</u>

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, где $a_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$

Если k< 1, то ряд сходится.

Если k> 1, то ряд расходится.

Если k=1, то требуется дополнительное исследование.

<u>Пример.</u>

1) $1+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$, $a_n = \frac{1}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$, по признаку Каши ряд сходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^n(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{ln^2 3} + \frac{1}{ln^2 4} + \cdots$, $a_n = \frac{1}{ln^n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{ln^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, 0< 1, значит ряд сходится по признаку Коши.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots$, $a_n = 3^n$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n}$=3 > 1, ряд расходится.